Grundwissen Mathematik 7. Klasse

GWM 7.1	Achsensymmetrie

Abbildungsvorschrift der Achsenspiegelung:

Liegen die Punkte P und P’ achsensymmetrisch bzgl. der Achse a, so gilt:

- PP’ ist senkrecht zu a — (PP’ $\perp$ a)
- [PP’] wird von a halbiert. — dist(P;a) = dist(P’;a)
- Liegt P auf der Achse, so ist er mit seinem Spiegelpunkt identisch. — P = P’ $\Leftrightarrow$ P $\in$ a

Weitere Eigenschaften der Achsenspiegelung

① Zueinander symmetrische Strecken sind gleich lang. — $\overline{AB} = \overline{A'B'}$

② Zueinander symmetrische Winkel sind gleich groß. — $\alpha = \alpha'$

③ Der Umlaufsinn von Figuren ändert sich.

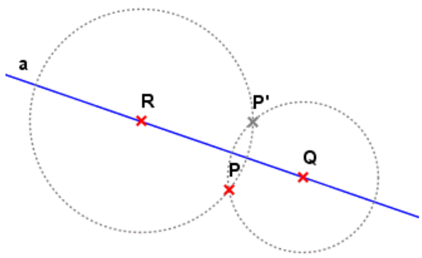
④ Zueinander symmetrische Geraden schneiden sich auf der Achse oder sind parallel

⑤ Speziell: $\overline{AP} = \overline{A'P}$, wenn P $\in$ a

⑥ Die Schnittpunkte zweier (großer) symmetrischer Kreise liegen auf der Achse.

GWM 7.2	Konstruktionen

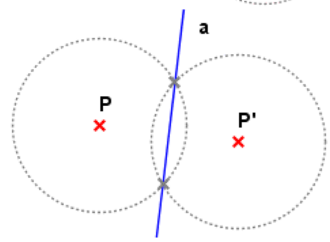
Konstruktionen der Achsenspiegelung:



Spiegelpunkt konstruieren

Wähle zwei beliebige Punkte Q und R auf der Achse a.

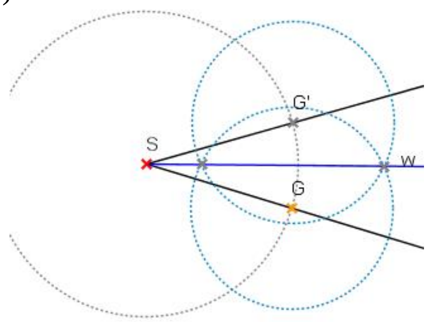
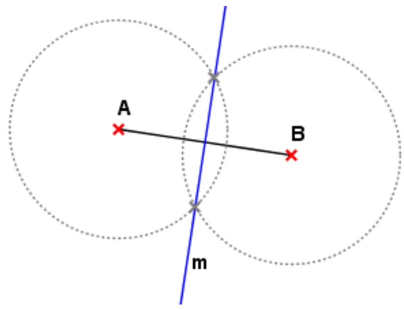
Die Kreise $k\left(R;\overline{RP}\right)$ und $k\left(Q;\overline{QP}\right)$ schneiden sich in P und P’.



Achse konstruieren

Zeichne zwei Kreise durch P und P’ mit beliebigem (genügend großem), aber gleich großem Radius. Durch die Schnittpunkte der Kreise ist die Achse a eindeutig festgelegt.

Konstruktionen mit Hilfe der Achsenspiegelung:

Winkelhalbierende: Der Kreis um S mit beliebigem Radius schneidet die Schenkel in den Punkten G und G’. Die Symmetrieachse, die G auf G’ abbildet und S fest lässt (S $\in$ a) ist die Winkelhalbierende. 	Mittelsenkrechte zu [AB]: Die Kreis um A und B mit gleichem (genügend großem) Radius schneiden sich in zwei Punkten, die die Mittelsenkrechte eindeutig festlegen. 
Lot zu g durch P fällen Konstruiere den Spiegelpunkt P’ zu P zur Achse g. PP’ ist das Lot zu g.	Senkrechte in M zu g errichten Bestimme zwei beliebige Punkte P und P’ auf g, die von M den gleichen Abstand haben. Die Achse a, die P auf P’ abbildet (und auch noch durch M) geht ist die Senkrechte zu g.

GWM 7.3	Punktsymmetrie

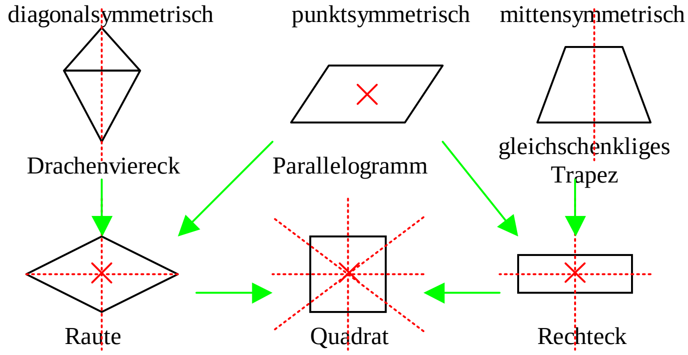
Abbildungsvorschrift der Punktspiegelung:

Liegen die Punkte P und P' punktsymmetrisch bzgl. des Punktes Z (Zentrum der Spiegelung), so gilt:

- ➢ P und P' sind gleich weit von Z entfernt. $\overline{PZ} = \overline{P'Z}$
- ➢ P, P' und Z liegen auf einer Geraden. $Z \in PP'$
- ➢ Sind P und P' identisch, so ist P das Zentrum. $P = P' \Leftrightarrow P = P' = Z$

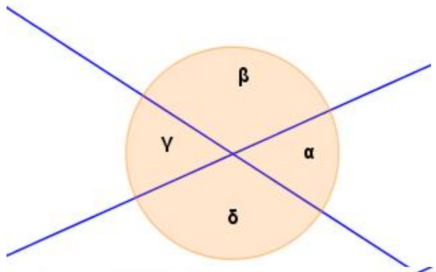
GWM 7.4	Vierecke

Symmetrische Vierecke



GWM 7.5	Winkel

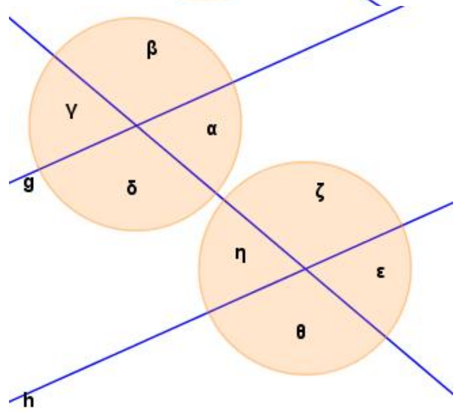
Scheitel- und Nebenwinkel



Scheitelwinkel: α und γ; β und δ
Nebenwinkel: α und β; γ und δ

Scheitelwinkel sind gleich groß, Nebenwinkel ergänzen sich zu 180°.

Wechselwinkel, Stufenwinkel, Nachbarwinkel

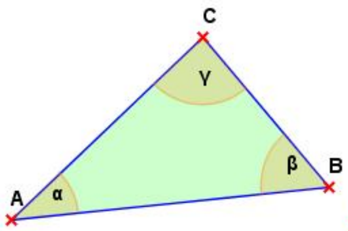


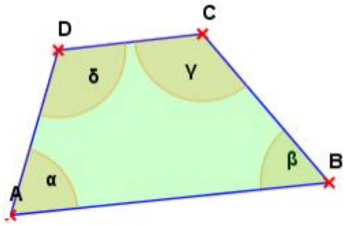
Wechselwinkel (Z-Winkel): α und η, β und θ, γ und ε, δ und ζ
Stufenwinkel (F-Winkel): α und ε, β und ζ, γ und η, δ und θ
Nachbarwinkel (Ergänzungswinkel): α und ζ, δ und η

Die Geraden g und h sind genau dann parallel, wenn
Wechsel- und Stufenwinkel gleich groß sind,
Nachbarwinkel sich zu 180° ergänzen.

Innenwinkelsumme

Im Dreieck beträgt die Innenwinkelsumme 180°,
im Viereck 360°.





GWM 7.6	Terme

Treten in einem Term (Rechenausdruck) verschiedene Variablen (Platzhalter) auf, so dürfen diese mit verschiedenen oder gleichen Zahlen aus der Grundmenge **G** belegt werden. Man berechnet somit den zugehörigen Termwert.

Zwei Terme heißen äquivalent, wenn sich für alle möglichen Einsetzungen jeweils gleiche Termwerte ergeben. Terme lassen sich durch Termumformungen in äquivalente Terme umwandeln.

Termumformungen:

- Rechengesetze: Assoziativgesetz, Kommutativgesetz, Distributivgesetz (siehe GWM 5.4.)

Klammern auflösen

- Plusklammer: Steht vor einer Klammer ein Pluszeichen, so kann die Klammer weggelassen werden.
- Minusklammer: Steht von einer Klammer ein Minuszeichen, so müssen beim Weglassen der Klammer alle Vorzeichen vertauscht werden. Beispiel: $a - (b + c) = a - b - c$

Ausmultiplizieren

- Zwei Summen werden multipliziert, indem man jeden Summanden der ersten Klammer mit jedem Summanden der zweiten Klammer multipliziert (Vorzeichen!) und die Produkte addiert.

Beispiel: $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

- Binomische Formeln
  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Fakorisieren

- Durch Ausklammern gemeinsamer Faktoren oder mit Hilfe der binomischen Formeln kann man Summen in Produkte verwandeln

GWM 7.7 Gleichungen

Wenn man in eine Gleichung an Stelle der Variablen eine Zahl einsetzt, so kann sich eine wahre oder eine falsche Aussage ergeben.
In der Lösungsmenge **L** einer Gleichung sind alle Zahlen aus der Grundmenge **G** enthalten, die in die Gleichung eingesetzt, eine wahre Aussage ergeben.
Eine lineare Gleichung hat entweder genau eine Zahl oder keine Zahl (**L** = { }) oder alle Zahlen (**L** = **G**) der Grundmenge als Lösung.

Äquivalenzumformungen:
Äquivalenzumformungen ändern die Lösungsmenge **L** einer Gleichung nicht.
Äquivalenzumformungen sind:

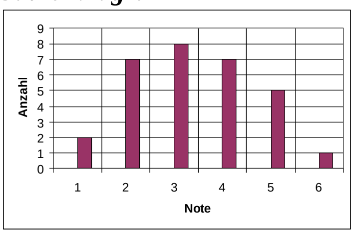
- Zu (Von) beiden Seiten der Gleichung eine Zahl oder Term addieren (subtrahieren).
- Beide Seiten der Gleichung mit (durch) einer (eine) Zahl ($\neq 0$) multiplizieren (dividieren).

GWM 7.8 Daten, Diagramme

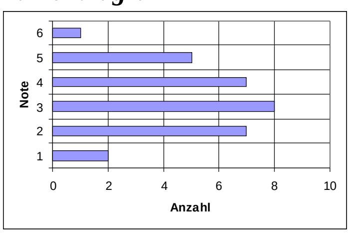
Das arithmetische Mittel (Durchschnitt) einer Datenreihe erhält man, indem man alle Werte addiert und den Summenwert durch die Anzahl der Summanden dividiert.

Verschiedene Diagrammtypen:

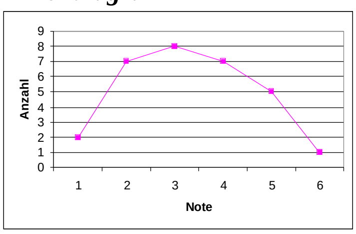
Säulendiagramm



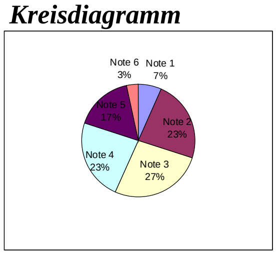
Balkendiagramm



Liniendiagramm



Kreisdiagramm



GWM 7.9	Kongruenz und Dreiecke

Dreieck sind deckungsgleich (kongruent) bzw. eindeutig konstruierbar, wenn sie in folgenden Größen (Seiten und Winkeln) übereinstimmen bzw. folgende Größen gegeben sind:

SSS – Satz: Drei Seiten
SWS – Satz: Zwei Seiten und der dazwischen liegende Winkel
SsW – Satz: Zwei Seiten und der der größeren Seite gegenüberliegende Winkel
WWS – Satz: Zwei Winkel und eine Seite

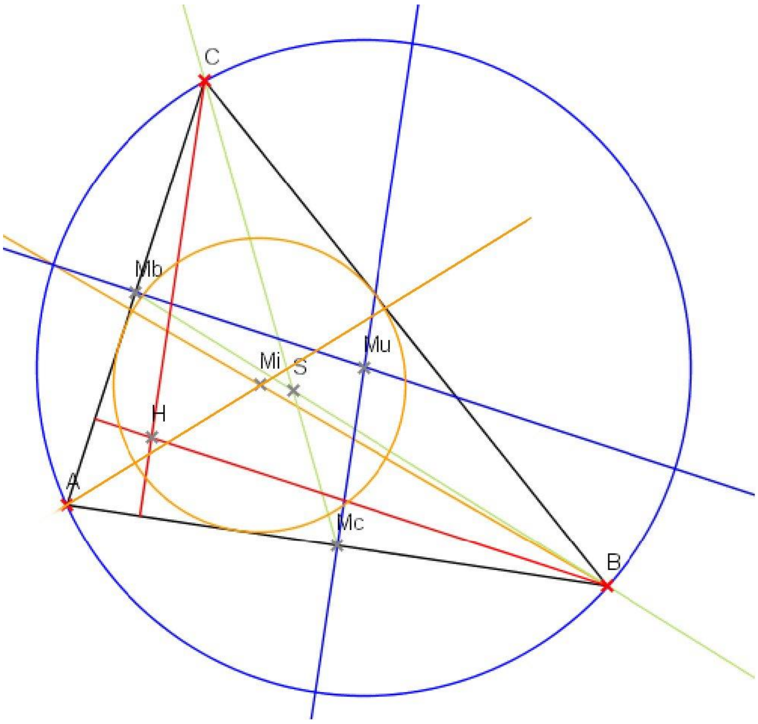
GWM 7.10	Transversalen im Dreieck

Seitenhalbierende s_a, s_b, s_c
(Mitte der Seite und gegenüberliegende Ecke)
Alle Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in genau einem Punkt, dem Schwerpunkt S

Winkelhalbierende w_α, w_β, w_γ
(Winkelhalbierende eines Innenwinkels)
Alle Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in genau einem Punkt, dem Inkreismittelpunkt M_i.

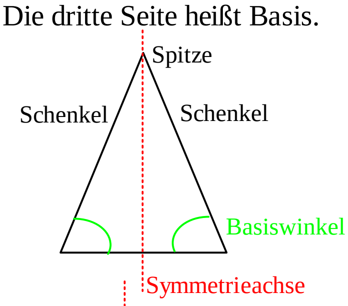
Mittelsenkrechte m_a, m_b, m_c
(Senkrechte zum Mittelpunkt einer Seite errichten)
Alle Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in genau einem Punkt, dem Umkreis-mittelpunkt M_u.

Höhe h_a, h_b, h_c
(Lot von Ecke auf gegenüberliegende Seite fällen)
Alle Höhen eines Dreiecks schneiden sich in genau einem Punkt H.

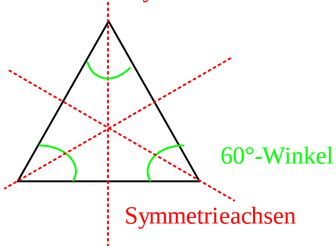


GWM 7.11	Besondere Dreiecke

Gleichschenkliges Dreieck:
Dreiecke mit zwei gleich langen Seiten (Schenkeln) heißen gleichschenklig. Die dritte Seite heißt Basis.
Eigenschaften:
- Das Dreieck hat zwei gleich lange Seiten.
- Das Dreieck hat zwei gleich große Winkel (Basiswinkel).
- Das Dreieck ist achsensymmetrisch.



Gleichseitiges Dreieck:
Dreiecke mit drei gleich langen Seiten heißen gleichseitig.
Eigenschaften:
- Das Dreieck hat drei gleich lange Seiten.
- Das Dreieck hat drei gleich große Winkel (= 60°).
- Das Dreieck hat drei Symmetrieachsen.



Rechtwinkliges Dreieck:
Dreiecke mit einem 90°-Winkel heißen rechtwinklig.
Eigenschaften:
- Das Dreieck hat einen 90°-Winkel.
- Der Umkreis des Dreiecks ist der Thaleskreis.