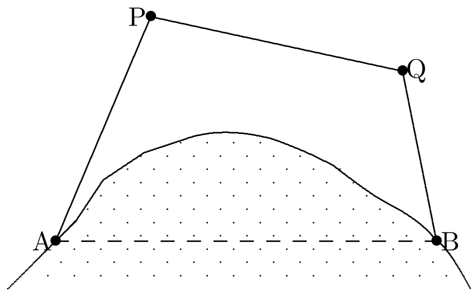
Übungsblatt 2.SA M 10

1. Über einen Teich soll von A nach B eine Brücke gebaut werden.
   Der Vermessungsingenieur misst:
   $\overline{AP} = 287\,\text{m}$
   $\overline{PQ} = 326\,\text{m}$
   $\overline{QB} = 135\,\text{m}$
   $\sphericalangle APQ = 105^o$
   $\sphericalangle PQB = 127^o$
   Berechnen Sie die Länge der Brücke $\overline{AB}$!



2. Zeigen Sie, dass die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$2\cos 217^\circ + \cos 397^\circ - \sin 307^\circ = 0$$

   Anleitung: Führen Sie die auftretenden Winkelfunktionen auf solche mit Argumenten zwischen 0 und 90 Grad zurück. Eine Berechnung mit Näherungswerten (Taschenrechner!) gilt nicht als Beweis.

3. Zeichnen Sie einen Kreis mit Radius 5 cm. Dieser Kreis sei der Einheitskreis.

   (a) Bestimmen Sie mit größtmöglicher Genauigkeit $\sin 40^o$ und $\cos 40^o$ und berechnen Sie daraus $\tan 40^o$.

   (b) Bestimmen Sie mit größtmöglicher Genauigkeit den Winkel β im I. Quadranten so, dass $\sin\beta = 0{,}8$.

   (c) Veranschaulichen Sie die Gleichung $\sin 230^o = \sin 310^o$. Welche allgemeine Formel liegt dieser Gleichung zugrunde?

4. Zeichnen Sie für $x \in [-\pi; \pi]$ mit verschiedenen (nichtroten) Farben der Reihe nach die Graphen der Funktionen

   (a) $y = \sin x$, (b) $y = \sin 3x$, (c) $y = -2 \cdot \cos 3x$.

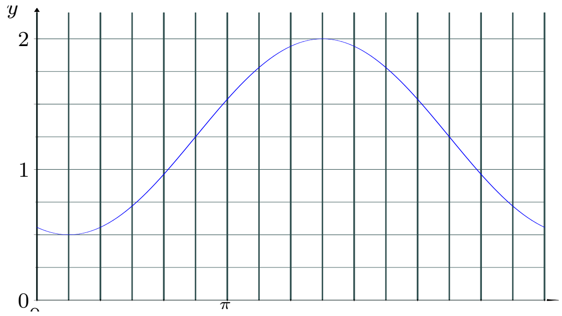
   (Längeneinheit: 2 cm auf beiden Achsen; $\pi \approx 3$)

5. Zeichnen Sie eine volle Periode des Graphen der Funktion mit der Gleichung

   $y = 3 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) - 1{,}5$ (Längeneinheit: 1 cm)

   und berechnen Sie die exakten Werte der Schnittstellen des Graphen mit der x-Achse im Intervall $[-2\pi; 2\pi]$.

6. Nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen einer *Sinus*-Funktion $f(x)$.

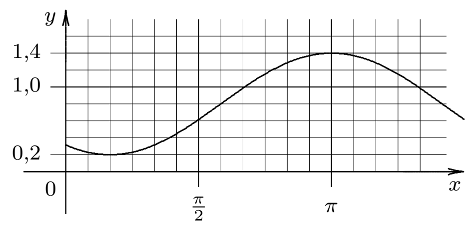
   

   Ermittlen Sie die Gleichung von f.

   Übertragen Sie dazu den Graphen auf Ihr Blatt und zeichnen Sie die für die Rechnung wichtigen Größen ein.

   Das Ergebnis soll Brüche (keine Dezimalbrüche) enthalten!

7. Nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen einer *Sinus*-Funktion $f(x)$.

   Ermittlen Sie die Gleichung von f.

   Übertragen Sie dazu den Graphen auf Ihr Blatt und zeichnen Sie die für die Rechnung wichtigen Größen ein.

   Das Ergebnis soll Brüche (keine Dezimalbrüche) enthalten!

8. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 1{,}5 \cdot \sin[(2 \cdot (x - \frac{\pi}{3})]$ mit $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Bestimmen Sie die Periodenlänge und die Wertemenge von f.

   (b) Bestimmen Sie *alle* Nullstellen und die x-Werte *aller Hochpunkte* der Funktion.

   (c) Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $[-2\pi; 2\pi]$ mit Hilfe der Ergebnisse von a) und b) (Längeneinheit: 1 cm, $\pi \approx 3$).

9. (a) Zeichnen Sie in dasselbe Koordinatensystem mit verschiedenen Farben im Intervall $[0; 4\pi]$ die Graphen der angegebenen Funktionen.
   (Längeneinheit: 1 cm, $\pi \approx 3$)

      i. $y = 2 \cdot \sin(x + 2)$

      ii. $y = 2 \cdot \sin[0{,}5 \cdot (x + 2)]$

      iii. $y = 0{,}5 \cos x$

   (b) Bestimmen Sie die x-Werte *aller Tiefpunkte* der drei Funktionen.

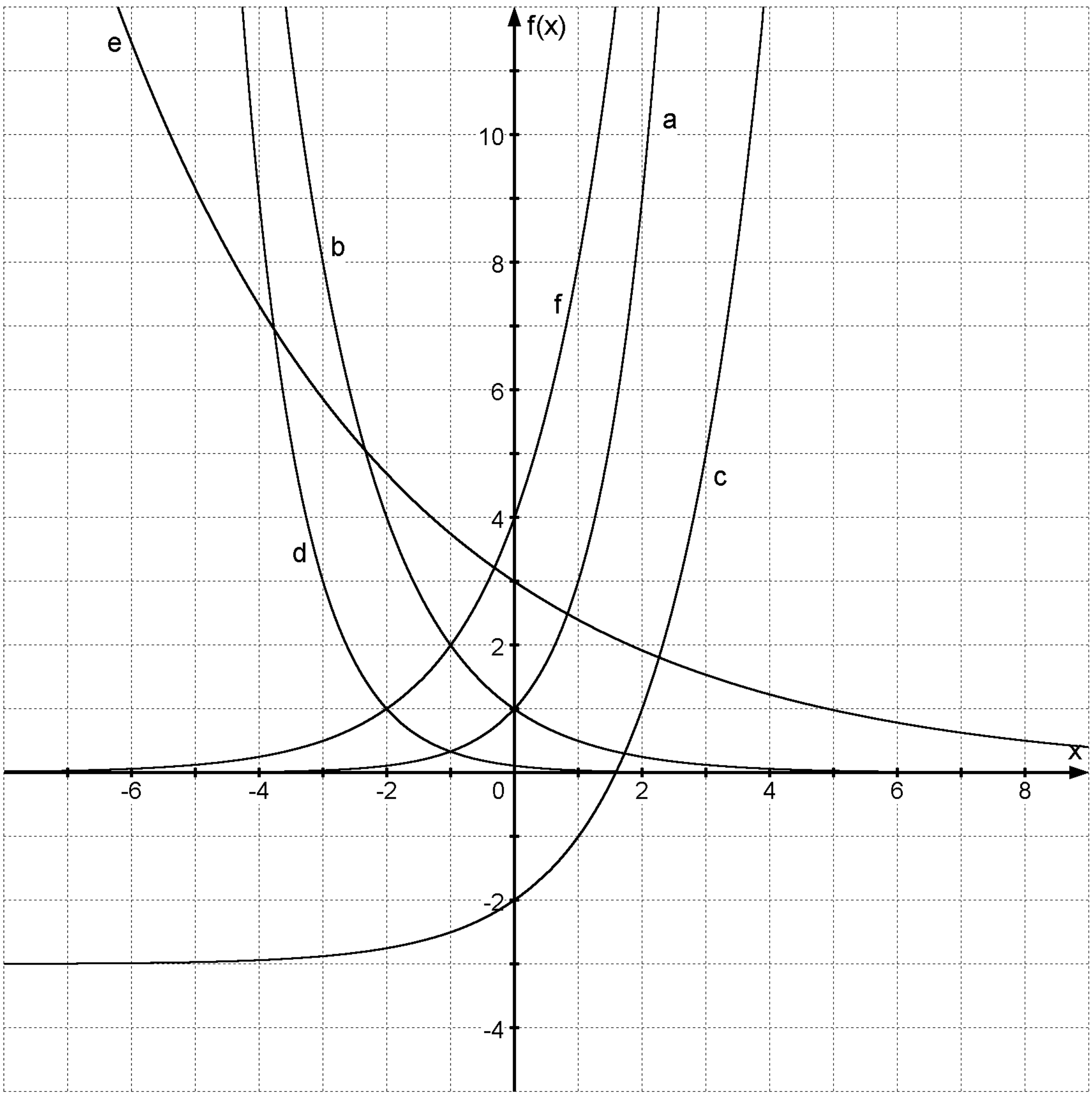
10. **Taschengeld**

    Peter startet in wenigen Tagen zu einer zweiwöchigen Klassenfahrt. Seine Eltern möchten ihm nach folgendem Plan Taschengeld mitgeben:

Für den ersten Tag 3 Euro, dann täglich 2 Euro mehr als am Tag vorher. Peter überlegt kurz und macht einen scheinbar bescheidenen Gegenvorschlag: Für den ersten Tag 3 Cent, dann täglich den doppelten Betrag des Vortages.
Was meinst du dazu?

11. **Funktionsgleichungen bestimmen**

Bestimme die Funktionsgleichungen zu den abgebildeten Graphen!



12. (a) Erstellen Sie für die Funktion $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ eine Wertetabelle im x-Intervall $[-4; 3]$ und zeichnen Sie den Graphen von f in der Einheit 1 cm!

(b) Wir betrachten jetzt die Funktion $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} - 3$. Schreiben Sie in Worten hin, wie man den Graphen von g aus dem Graphen von f erhält! Zeichnen Sie jetzt, ohne neue Werte zu berechnen, den Graphen von g in das schon vorhandene Koordinatensystem!

(c) Für welches x gilt $g(x) = 0$? Die graphisch gewonnene Lösung soll durch Probieren mit dem Taschenrechner auf eine Genauigkeit von zwei Nachkommastellen verbessert werden!

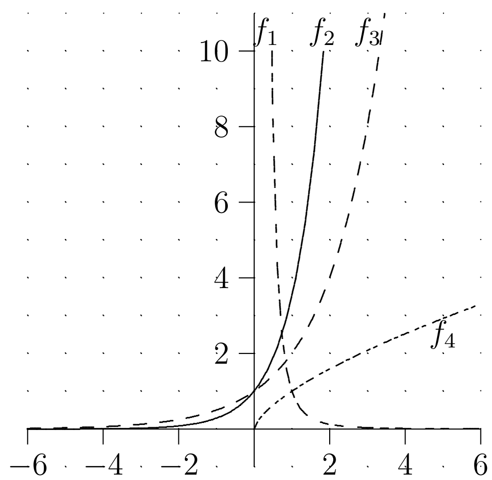
13. (a) Ordnen Sie den abgebildeten Funktionsgraphen jeweils eine der folgenden Funktionsgleichungen zu:

a) $y = 2^x$ b) $y = x^{-3}$ c) $y = 3{,}5^x$

d) $y = x^{\frac{2}{3}}$ e) $y = x^{\frac{3}{2}}$ f) $y = x^3$

(b) Wie lautet die Umkehrfunktion zu f_4? Zeichnen Sie den Graphen ein.

(c) Durch Spiegeln des Graphen von f_3 an der y-Achse erhält man einen neuen Funktionsgraphen. Geben Sie den Funktionsterm dazu an.



14. **Mathe-Quiz I. selbstgemacht!**

(a) Was ist der Unterschied zwischen absolutem und relativem Zuwachs?

(b) Was ist der Unterschied zwischen dem Wachstumsfaktor und dem Zerfallsfaktor?

(c) Wie wird der relative Zuwachs in der Regel angegeben?

(d) Erkläre den Begriff Halbwertszeit.

(e) Was bedeutet äquidistant?

(f) Was sind Logarithmen?

(g) Wie nennt man die Zahl y in dem Term x^y?

(h) Wie nennt man in dem Ausdruck $\log_a x$ die Zahl x?

(i) Nenne je einen anderen Begriff für die Grundzahl und für die Hochzahl einer Potenz.

(j) Wie schreibt man kurz für $\log_{10} x$?

(k) Schreibe $2^x = 16$ als Logarithmengleichung.

(l) Gib die Formel für relativen Zuwachs an.

(m) Bestimme x in $x = \log_2 64$.

(n) Bestimme x in $x = \log_5 625$.

(o) Bestimme x in $x = \log_3 81$.

Quelle: mathematik lehren (2001), H. 106, S. 55-57

15. **Flucht aus Heidelberg**

Im Jahr 1855 flüchtete in Heidelberg ein Student nach einem Duell mit einer Legitimationskarte, die er sich von einem Kommilitonen ausgeliehen hatte. Als die Flucht über die Grenze gelungen war, warf der Student die Karte fort; sie wurde als verdächtig an das Heidelberger Universitätsgericht eingesandt. In der folgenden Untersuchung antwortete der Kommilitone, dem die Karte gehörte, mit einem Satz, der sich zunächst unter den Studenten schnell verbreitete und heute als Redewendung allgemein bekannt ist. Dieser Satz ist der Lösungsspruch des Rätsels.

	Aufgaben:	Lösung
a)	$\log_3 27$	
b)	$\log_3 x = 2 \rightarrow x =$	
c)	$\log_x 49 = 2 \rightarrow x =$	
d)	$\log_{\frac{3}{4}} 3 - \log_{\frac{3}{4}} 4$	
e)	$(\log_2 2^{25}) : (\log_5 5^5)$	
f)	$\log_3 5 + \log_3 \frac{1}{5}$	
g)	$\log_2 4^2 + \log_2 4$	
h)	$\log_2 16 \cdot \log_2 4$	
i)	$6 \log_3 3 + \log_3 \frac{1}{9}$	
j)	$4(\log_2 88 - \log_2 11)$	
k)	$\log_2(\log_2 2^{2^{10}})$	
l)	$2 \log_2 5 + \log_3 90 + \log_2 \frac{1}{25} - \log_3 10$	

Zuordnung:

Lösung	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Buchstabe	H	S	E	V	T	C	N	O	A	W	I

Lösung	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Buchstabe	B	M	Q	Y	L	Z	G	P	X	R	F

Als **Lösungssatz** ergibt sich eine Redewendung:

j)	l)	k)	g)	g)	h)	j)	l)	k)	d)	i)	f)	h)	d)	l)

k)	e)	f)	b)	l)	k)	d)	d)	a)	c)	g)	g)	k)	e)	f)	i)	d)

Quelle: mathematik lehren (1998), H. 92, S. 60

16. **Exponentielle Prozesse**

Quellen für Aufg. 2-14: Elemente 11, Abakus 10, Mathematik 11 Hessen, Mathematik 12.1 GK Hessen

Meerschweinchen

Am Eröffnungstag eines Streichelzoos befanden sich 93 Meerschweinchen in einem Gehege. Ein Jahr später waren es bereits 115 Meerschweinchen.

(a) Wie viele Meerschweinchen werden es am Tag des 10-jährigen Jubiläums sein, wenn man annimmt, dass der Bestand linear wächst?

(b) Wie viele Meerschweinchen werden es an diesem Tag sein, wenn man ein exponentielles Wachstum annimmt?

(c) Lässt sich die Vermehrung der Meerschweinchen eher mit dem linearen oder dem exponentiellen Modell erklären?

17. **Bierschaum**

In einem zylindrischen Gefäß wird der Zerfall von Bierschaum untersucht. Die Höhe der Schaumsäule verringert sich alle 15 Sekunden um 9%.

(a) Um wie viel Prozent verringert sich die Hohe der Schaumsäule in 1 Minute?

(b) Zu Beobachtungsbeginn beträgt die Schaumhöhe 10 cm. Bestimme den Funktionsterm der zugehörigen Exponentialfunktion, die die Schaumhöhe (gemessen in cm) in Abhängigkeit von der jeweiligen Zeitspanne (gemessen in Minuten!) beschreibt. Runde dabei auf 4 Dezimalen.

(c) Zeichne den Graphen aus Teil (b) im Bereich $[0; 8]$.

(d) Man spricht von „sehr guter Bierschaumhaltbarkeit“, wenn die Halbwertszeit des Schaumzerfalls mehr als 2 Minuten beträgt. Beschreibe, wie man am Graphen (!) überprüfen kann, ob im vorliegenden Fall sehr gute Bierschaumhaltbarkeit vorliegt. Liegt sie vor?