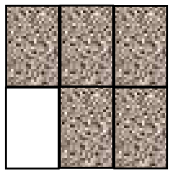
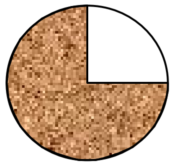
Grundwissen Mathematik 6. Klasse

GWM 6.1 | Bruchzahlen / Erweitern und Kürzen

Der **Bruchteil** $\frac{z}{n}$ eines Ganzen bedeutet:
Teile das Ganze in n gleiche Teile und nimm z von diesen Teilen.
$\frac{z}{n}$ nennt man einen **Bruch**.



$\frac{5}{6}$ eines Rechtecks



$\frac{3}{4}$ eines Kreises

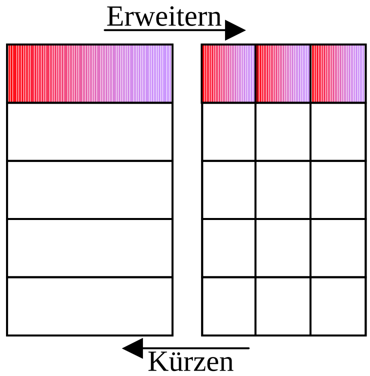
Der **Zähler** gibt an, wie viele dieser Teile zusammengefasst werden → 7

Der **Nenner** gibt an, in wie viele Teile das Ganze zerlegt wird → 9

$$\frac{7}{9}$$

Bruchstrich

Beispiel: $\frac{12}{17}$ von 51 € = (51 € : 17) · 12 = 3 € · 12 = 36 €



Erweitern: Zähler und Nenner eines Bruches werden mit derselben Zahl multipliziert.

Beispiel: $\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{3}{15}$ („mit 3 erweitert")

Kürzen: Zähler und Nenner eines Bruches werden durch dieselbe Zahl dividiert.

Beispiel: $\frac{3}{15} = \frac{3:3}{15:3} = \frac{1}{5}$ („mit 3 gekürzt")

Ein Bruch ist vollständig gekürzt, wenn Zähler und Nenner keine gemeinsamen Teiler mehr haben.

Beispiel: $\frac{210}{315} = \frac{70}{105} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

Brüche, die durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervorgehen, beschreiben den gleichen Bruchteil!

Hauptsatz der Bruchrechnung:
Ein Bruch ist ein Quotient. Ein Bruchstrich kann durch ein Divisionszeichen ersetzt werden.

Beispiele: $37:5 = \frac{37}{5} = 7\frac{2}{5}$ $\qquad 2:9 = \frac{2}{9}$ $\qquad -21:8 = -\frac{21}{8} = -2\frac{5}{8}$

GWM 6.2 | Prozent- und Dezimalschreibweise / Rationale Zahlen

Brüche mit dem Nenner 100 kann man in Prozentschreibweise angeben: $\frac{5}{100} = 5\,\%$

$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0{,}25 = 25\,\%$	$\frac{1}{2} = \frac{50}{100} = 0{,}5 = 50\,\%$	$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0{,}75 = 75\,\%$	$1 = \frac{100}{100} = 100\,\%$
$\frac{1}{10} = 0{,}1 = 10\,\%$	$\frac{1}{5} = \frac{20}{100} = 0{,}2 = 20\,\%$	$\frac{1}{20} = \frac{5}{100} = 0{,}05 = 5\,\%$	$\frac{1}{100} = 0{,}01 = 1\,\%$

Stellenwerttafel:

T	H	Z	E		z	h	t	zt	ht	m
7	2	3	5	,	2					
			0	,	1	7	5	8	9	4

Brüche, die, vollständig gekürzt, im Nenner nur die Primfaktoren 2 und 5 enthalten, können als endliche Dezimalzahlen geschrieben werden. (Man erweitert auf den Nenner 10, 100, 1000, ...)

Beispiel: $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0{,}4$ $\qquad 3\frac{207}{10000} = 3{,}0207$ (Lies: „Drei Komma null zwei null sieben")

Brüche kann man auch mit Hilfe der Division in Dezimalbrüche umwandeln:

$\frac{1}{8} = 1:8 = 0{,}125$ endlicher Dezimalbruch $\qquad \frac{1}{6} = 1:6 = 0{,}166666.... = 0{,}1\overline{6}$ unendlicher Dezimalbruch

Alle positiven und negativen Brüche und die Zahl Null bilden zusammen die **Menge der rationalen Zahlen Q**.
Q umfasst auch die Menge aller ganzen Zahlen **Z** und damit auch die Menge der natürlichen Zahlen **N**.

GWM 6.3	Vergleichen rationaler Zahlen und Runden

Eine rationale Zahl ist umso größer, je weiter rechts sie sich auf der Zahlengeraden befindet.
Vergleichen von positiven Brüchen:
Von zwei Brüchen mit gleichen Nennern ist derjenige größer, der den größeren Zähler besitzt.
Von zwei Brüchen mit gleichen Zählern ist derjenige größer, der den kleineren Nenner besitzt.

$\frac{12}{17} > \frac{9}{17}$ $\frac{5}{16} < \frac{5}{8}$

Um beliebige Bruchzahlen miteinander zu vergleichen, kann durch Kürzen oder Erweitern sowohl der Nenner als auch der Zähler gleich gemacht werden! Dann wendet man die obigen Regeln an.
Vergleichen von Dezimalzahlen:
Dezimalzahlen vergleicht man von „links nach rechts“. Die erste Stelle, in der sich zwei Dezimalzahlen unterscheiden, gibt an, welche die größere ist. Beispiel: 42,4530 < 42,4537 < 42,4601 < 42,50
Runden von Dezimalzahlen:
Ist die erste wegzulassende Ziffer **0, 1, 2, 3, 4**, so wird **abgerundet**, ist sie **5, 6, 7, 8, 9** so wird **aufgerundet**.

Runden auf	1 Dez	2 Dez	3 Dez	4 Dez	5 Dez
3,456491	≈ 3,5	≈ 3,46	≈ 3,456	≈ 3,4565	≈ 3,45649

GWM 6.4	Relative Häufigkeit

Ein Würfel wurde 200 Mal geworfen. Es wurde notiert, wie oft die **Ergebnisse** 1; 2; 3; 4; 5 und 6 auftraten.

Ergebnis	1	2	3	4	5	6
Anzahl („**Absolute Häufigkeit**“)	38	31	29	33	34	35
Anteil an der Gesamtzahl („**Relative Häufigkeit**“)	$\frac{38}{200} = 19\ \%$	15,5 %	14,5 %	16,5 %	17 %	17,5 %

In 19 % aller Würfe wurde also die „1“ geworfen.

Führt man dieses **Zufallsexperiment** „Werfen eines Würfels“ sehr oft durch, kann man damit rechnen, dass die „1“ in etwa $\frac{1}{6}$ $(\approx 16{,}7\ \%)$ aller Würfe fallen wird (nach dem **empirischen Gesetz der großen Zahlen**).

GWM 6.5	Addieren und Subtrahieren von Brüchen und Dezimalzahlen

Zum Addieren und Subtrahieren müssen **Brüche** den **gleichen Nenner** haben.

Der **Nenner** wird **beibehalten**, die **Zähler** werden **addiert** bzw. **subtrahiert**. $\frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ $\frac{4}{7} - \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$

Brüche mit **verschiedenen Nennern** müssen durch Kürzen und/oder Erweitern zunächst **gleichnamig** gemacht werden. Dazu bestimmt man den **Hauptnenner** der Brüche.
Der Hauptnenner ist das **kleinste gemeinsame Vielfache (kgV)** der vorliegenden Nenner.

$\frac{5}{6} - \frac{3}{14} = \frac{35}{42} - \frac{9}{42} = \frac{26}{42} = \frac{13}{21}$ V(6) = { 6; 12; 18; 24; 30; 36; **<u>42</u>**; 48; ...} V(14) = { 14; 28; **<u>42</u>**; 56; ...}

Oder mit Primfaktorzerlegung: $6 = 2 \cdot 3$; $14 = 2 \cdot 7$; kgV(6;14) = $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$

Addieren und Subtrahieren von Dezimalzahlen
Zahlen so untereinanderschreiben, dass Komma unter Komma steht und wie bei natürlichen Zahlen stellenweise rechnen.

$$\begin{array}{r} 12{,}985 \\ +\ \ 4{,}0092 \\ \hline 16{,}9942 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14{,}7796 \\ -\ \ 4{,}80092 \\ \hline 9{,}97868 \end{array}$$

GWM 6.6	Multiplikation und Division von Brüchen und Dezimalzahlen

Zwei Brüche werden miteinander **multipliziert**, indem man **Zähler mit Zähler** und **Nenner mit Nenner** multipliziert (**Kürzen nicht vergessen!**). $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{3}{10}$ $\frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{1} = 2$ $3\frac{3}{5} \cdot 2\frac{1}{3} = \frac{18}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{42}{5}$

Man **dividiert** durch einen Bruch, indem man mit seinem **Kehrbruch multipliziert** (eventuell kann man vor dem Ausmultiplizieren **kürzen!**)

$$\frac{4}{5}:\frac{6}{7}=\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{6}=\frac{4\cdot 7}{5\cdot 6}=\frac{2\cdot 7}{5\cdot 3}=\frac{14}{15}$$

Multiplizieren von Dezimalzahlen: Zahlen ohne Rücksicht auf die Kommas multiplizieren. Das Komma wird so gesetzt, dass das Ergebnis so viele Nachkommastellen hat wie die Faktoren zusammen. $0{,}03 \cdot 2{,}5 = 0{,}075$

Dividieren von Dezimalzahlen: Im Divisor und Dividend das Komma so weit nach rechts verschieben, bis der Divisor eine ganze Zahl ist. Überschreitet man im Dividenden das Komma, muss im Ergebnis ein Komma gesetzt werden. $0{,}015 : 0{,}75 = 1{,}5 : 75 = 0{,}02$

GWM 6.7 Prozentrechnung

Grundwert (GW), **Prozentwert** (PW) und **Prozentsatz** (PS) sind die wichtigen Begriffe der Prozentrechnung. Der Grundwert steht für „das Ganze“, also 100 %, der Prozentsatz beschreibt den „Bruchteil“ vom Ganzen als Bruch mit dem Nenner 100 und der Prozentwert gibt an, wie viel dieser „Bruchteil“ als „Anteil“ ausmacht.

Beispiel:	45 %	von	120 kg	=	54 kg
	Prozentsatz		Grundwert		Prozentwert

Berechnung des Prozentsatzes: $\frac{54\,\text{kg}}{120\,\text{kg}} = 0{,}45 = 45\,\%$

Berechnung des Grundwerts: 45 % entspricht 54 kg
1 % entspricht 54 kg : 45 = 1,2 kg
100 % entspricht 1,2 kg · 100 = 120 kg

Berechnung des Prozentwerts: 0,45 · 120 kg = 54 kg

Allgemein gilt:

PS = PW : GW

GW = PW : PS

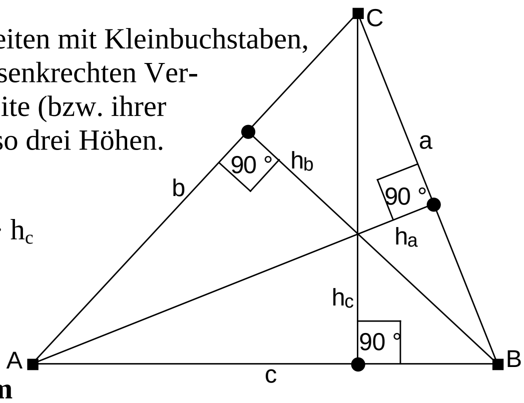
PW = PS · GW

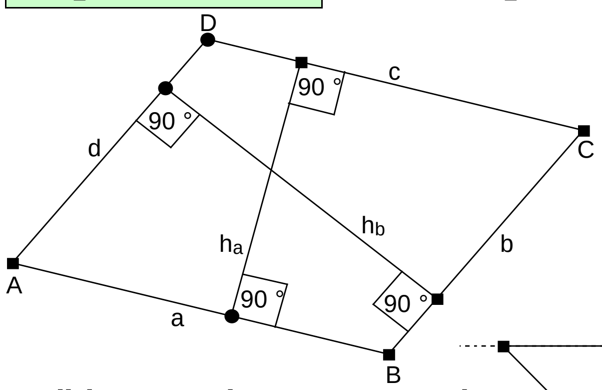
GWM 6.8 Flächeninhalt von Dreieck, Parallelogramm und Trapez

Dreieck

Jedes Dreieck besitzt drei Seiten (Grundlinien). Es ist üblich, diese Seiten mit Kleinbuchstaben, passend zur gegenüberliegenden Ecke zu bezeichnen. Die Länge der senkrechten Verbindungsstrecke zwischen einer Ecke und der gegenüberliegenden Seite (bzw. ihrer Verlängerung) heißt **Höhe des Dreiecks**. In jedem Dreieck gibt es also drei Höhen.
Für den **Flächeninhalt A_D** des Dreiecks gilt:

$\mathbf{A_D} = \frac{1}{2}\cdot \text{Grundlinie} \cdot \text{Höhe}$ also $\mathbf{A_D} = \frac{1}{2}\cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2}\cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2}\cdot c \cdot h_c$



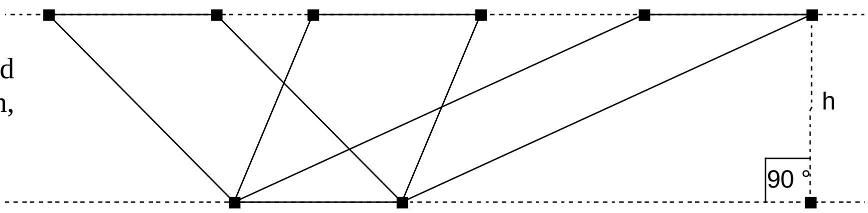


Parallelogramm

Beim Parallelogramm bezeichnet man den Abstand zweier paralleler Seiten als **Höhe**. In jedem Parallelogramm gibt es also zwei Höhen.
Für den **Flächeninhalt A_P** des Parallelogramms gilt:

$\mathbf{A_P} = \text{Grundlinie} \cdot \text{Höhe}$ also $\mathbf{A_P} = a \cdot h_a = b \cdot h_b$

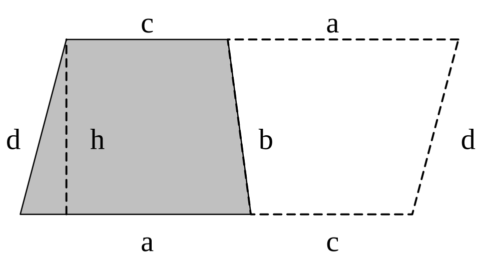
Parallelogramme, die in einer Seite und der zugehörigen Höhe übereinstimmen, haben den **gleichen Flächeninhalt**.



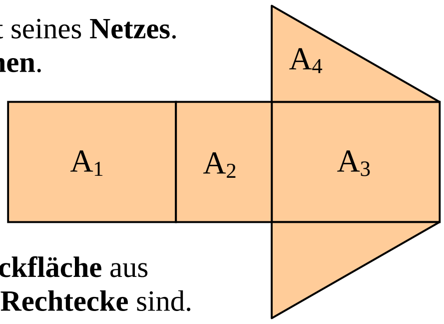
Trapez

Ein Viereck mit zwei zueinander parallelen Seiten nennt man **Trapez**.
Die beiden nicht zueinander parallelen Seiten heißen **Schenkel**.
Der Abstand der zueinander parallelen Seiten heißt **Höhe**.
Für den **Flächeninhalt** des Trapezes gilt:

$\mathbf{A_T} = \frac{1}{2}\cdot (a + c) \cdot h$



GWM 6.9 | Oberflächeninhalt und Schrägbild eines Körpers



Der **Oberflächeninhalt** eines Körpers ist identisch mit dem Flächeninhalt seines **Netzes**.
Er berechnet sich als Summe der Flächeninhalte seiner **Begrenzungsflächen**.

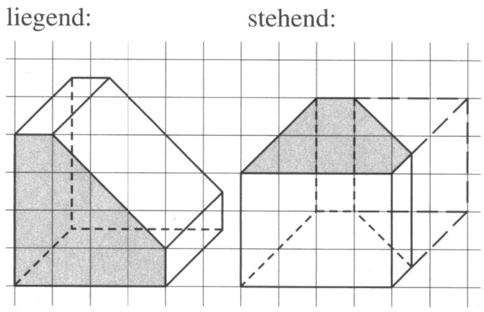
Beispiel: **Dreiseitiges gerades Prisma**

Oberfläche: **O** = $A_1 + A_2 + A_3 + 2 \cdot A_4$

Bemerkung:
Ein **gerades Prisma** ist ein Körper, bei dem die **Grundfläche** und die **Deckfläche** aus parallelen, **deckungsgleichen Vielecken** bestehen und die **Seitenflächen Rechtecke** sind. Der Flächeninhalt aller Seitenflächen ist das Produkt aus der Höhe des geraden Prismas und dem Umfang der Grundfläche.

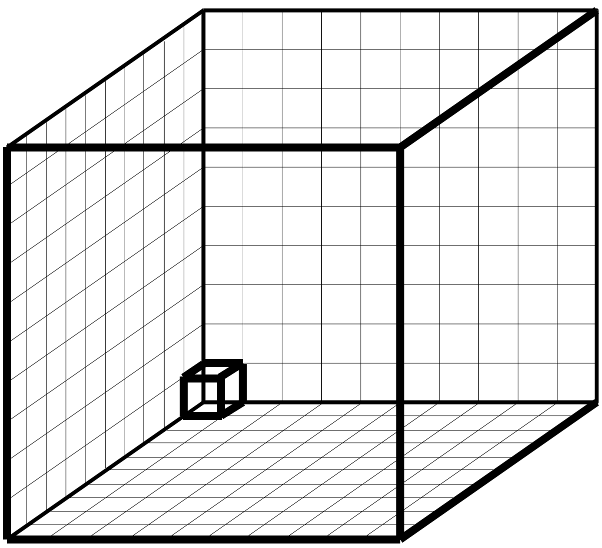
Schrägbild

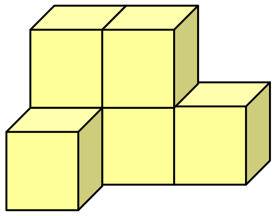
Die **räumliche Darstellung (Perspektive)** eines Körpers in der Zeichenebene nennt man **Schrägbild** des Körpers. Es ist sinnvoll eine Begrenzungsfläche in wahrer Größe zu zeichnen. Kanten, die in Wirklichkeit parallel sind, sind auch im Schrägbild parallel. Senkrechte Kanten dagegen stehen im Schrägbild nicht unbedingt senkrecht aufeinander.
Hinweis: Oft ist es sinnvoll, zunächst das Schrägbild eines Quaders zu zeichnen, aus dem sich das Schrägbild des Körpers dann entwickeln lässt.



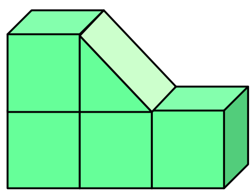
GWM 6.10 | Volumen (Rauminhalt)

Einen Würfel mit den Kantenlängen 1 LE (Längeneinheit) nennt man Einheitswürfel. Die Anzahl der Einheitswürfel, die notwendig ist, um den Rauminhalt (oder auch das Volumen) eines Körpers vollständig auszufüllen, ist ein Maß für die Größe des Raumes, den ein Körper einschließt.





6 Volumeneinheiten



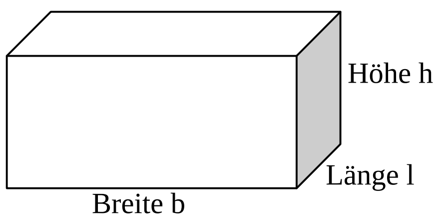
4,5 Volumeneinheiten

Volumen: Umrechnungszahl 1000 Besonderheiten: **1 dm³ = 1 l** **1 cm³ = 1ml** **1 hl = 100 l**

$1\ m^3 = 1000\ dm^3$	$1\ dm^3 = 1000\ cm^3$	$1\ cm^3 = 1000\ mm^3$	
	$1\ dm^3 = 0{,}001\ m^3$	$1\ cm^3 = 0{,}001\ dm^3$	$1\ mm^3 = 0{,}001\ cm^3$

Volumen eines Quaders:

$$\boxed{V_Q = b \cdot l \cdot h}$$



Damit folgt speziell für einen Würfel der Kantenlänge a:

$$\boxed{V_W = a \cdot a \cdot a = a^3}$$